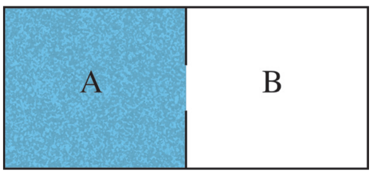
par Kylie Ravera

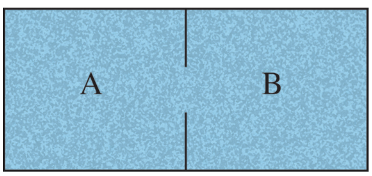
Les urnes d'Ehrenfest

Certaines expériences de pensée peuvent conduire physiciens, chimistes, mathématiciens, philosophes voire hommes politiques aux vertigineuses limites du temps et de l'espace. L'expérience des urnes d'Ehrenfest vous invite à embarquer vers ces horizons insoupçonnés.

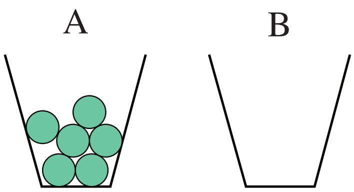
L'expérience d'Ehrenfest commence par une observation à la portée de tout un chacun : prenons une enceinte hermétique séparée en deux compartiments A et B de taille égale, reliés entre eux par un fin tuyau (ou par un trou). Remplissons le compartiment A d'un gaz quelconque, et observons la suite des évènements.



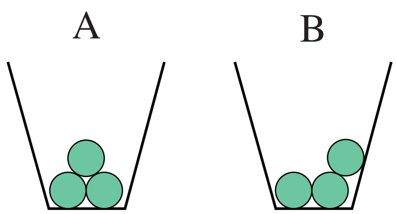
Assez rapidement, les molécules de gaz vont migrer du compartiment A vers le compartiment B, jusqu'à l'établissement d'une situation d'équilibre.



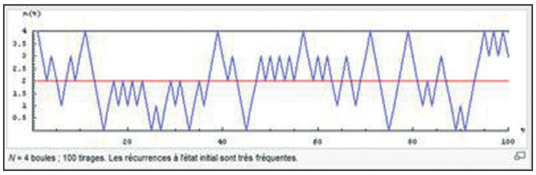
En moyenne, le nombre de molécules dans chaque compartiment sera identique, même si rien n'empêche les molécules de circuler d'un côté à l'autre. Il n'en faut pas plus pour que le paradoxe de l'irréversibilité vienne pointer le bout de son nez : alors même qu'aucun phénomène physique au niveau moléculaire n'empêcherait toutes les particules de revenir dans leur compartiment d'origine, force est de constater que cela ne se produit pas au niveau macroscopique. C'est sur ce paradoxe que les époux Ehrenfest se sont penchés, au début du XX^e siècle, en imaginant un modèle qui simplifie à l'extrême celui de la diffusion des gaz. Les deux compartiments sont remplacés par deux urnes : on remplit la première de N balles numérotées en laissant la seconde urne vide.

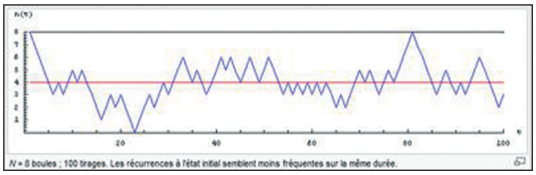


On tire ensuite de façon totalement aléatoire un numéro entre 1 et N, et la balle ainsi désignée change d'urne. L'opération se répète ce qu'il convient d'appeler « un grand nombre de fois », et on consigne les résultats.

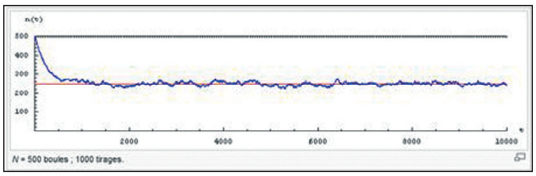


Première constatation : lorsque le nombre de balles est faible, le phénomène n'est pas du tout irréversible ! Avec trois, quatre ou même huit balles, des retours à l'état initial sont constatés en moins d'une centaine de tirages.





On remarque toutefois que ces retours à l'état initial sont de moins en moins nombreux au fur et à mesure que N augmente. Avec N = 500 et plus de dix mille tirages, on n'oscille plus que très légèrement autour du point d'équilibre – celui où le nombre de balles est le même dans les deux urnes.



Cela induit le genre de question qui peut empêcher de fermer l'œil de la nuit : est-il possible de revenir dans l'état initial quel que soit le nombre N et, si oui, au bout de combien de temps ? Un peu de mathématiques permet de répondre à ces questions.

Les chaînes de Markov

L'état du système à un instant donné est entièrement décrit par la connaissance du nombre de balles qui occupent l'urne A. Il existe N + 1 états différents, appelés E(0), E(1)… E(N), avec E(i) l'état où i balles se trouvent dans l'urne A (et donc N – i dans l'urne B). On note ensuite $p_{i,j}$ la probabilité de passer de l'état E(i) à l'état E(j) après un nouveau tirage. Comme seule une balle change d'urne à chaque tirage, il est impossible de passer de E(i) à E(j) si ces indices ne sont pas successifs, ce qui implique $p_{i,j} = 0$ pour $|i - j| \neq 1$.
De plus, $p_{i,\,i-1} = i/N$ pour i compris entre 1 et N, et $p_{i,\,i+1} = 1 - i/N$ pour i compris entre 1 et N – 1. Si X(n) est le nombre de balles dans l'urne A à l'instant n, on voit que la suite $(X(n))_n$ est une suite de variables aléatoires dont le énième terme ne dépend que du (n – 1)ème. Il s'agit précisément de la définition d'une chaîne de Markov : sachant le présent, le futur est indépendant du passé (c'est là que le philosophe se frotte les mains). Les $p_{i,j}$ ne sont rien d'autre que les éléments de la matrice de transition P de la chaîne de Markov. De plus, il est possible de passer de n'importe quel état E(i) à l'état E(j) en un nombre fini d'étapes : nous avons à faire à une chaîne *irréductible*.

Le physicien d'origine autrichienne Paul Ehrenfest (1880–1933).

Cette découverte permet d'exploiter tout l'attirail des propriétés des chaînes de Markov irréductibles. En particulier, il existe une loi stationnaire unique π telle que $\pi P = \pi$, avec $\sum_{k=1}^{N} \pi(k) = 1$: il s'agit de la *distribution stationnaire* de la chaîne. En résolvant l'équation pour la chaîne d'Ehrenfest, on trouve $\pi(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^N$.

Le lecteur bien informé aura reconnu la loi binomiale de coefficients (1/2, N). Intéressons-nous à présent à l'évaluation du temps de premier retour à un état E(k), soit le temps (ou le nombre de tirages) après lequel on peut espérer se retrouver dans ce même état E(k). On démontre que pour une chaîne de Markov irréductible de distribution stationnaire π ce temps vaut $1/\pi(k)$. En particulier, pour le modèle des urnes d'Ehrenfest, le temps moyen de retour à l'état E(k) est égal à $2^N \frac{k!(N-k)!}{N!}$.

On constate alors que le temps (en secondes) nécessaire au retour de toutes les balles dans l'urne A (c'est l'état E(0)) vaut 2^N à raison d'un tirage par seconde. Et voici la réponse à l'angoissante question : pour un observateur disposant d'un temps infini, l'irréversibilité n'est qu'illusoire. Tout comme les N balles finiront par revenir dans l'urne A, le gaz dispersé dans les deux compartiments finira par se retrouver dans un seul compartiment… au bout d'un temps de l'ordre de 2^N. Mais que vaut N ? Pour un système macroscopique, l'ordre de grandeur à considérer est celui du nombre d'Avogadro, $6{,}02 \times 10^{23}$, qui transporte l'observateur du domaine des molécules jusqu'au seuil du visible. Si l'on estime à 15 milliards d'années l'âge de l'univers (soit environ 5×10^{17} secondes), on se rend compte que $2^{6{,}02 \times 10^{23}}$ est… vertigineusement plus grand ! Voilà donc le temps qu'il nous faudrait attendre pour voir toutes nos molécules de gaz retourner dans l'enceinte A. Au final, la superposition d'un très grand nombre d'états réversibles peut conduire à un état en pratique irréversible.

« Un système isolé évolue toujours vers son maximum d'entropie » : voilà ce qu'établit le deuxième principe de la thermodynamique, qui trouve une illustration dans l'expérience d'Ehrenfest. Urnes et enceintes se stabilisent dans un état de « désordre maximum ». Au grand dam, peut-être, de nos hommes politiques et de leurs tentatives visant à faire régner l'ordre sur une planète qui, jusqu'à preuve du contraire, pourrait bien se comporter comme un système isolé…

K. R.