Nouvelles d’une taupe modèle

Par Kylie Ravera

L’Institut Intergalactique est le temple de l’excellence où exerce le redouté professeur Phi. Kylie Ravera nous raconte leurs aventures.

La tentation de l’autre boîte

L’effervescence règne dans la salle de loisirs de l’Institut Intergalactique où les élèves du professeur Phi sont rassemblés. Le dispositif d’holovision est allumé et montre un canard géant en 3D qui s’auto-déclare excellent en pâté. Le spot publicitaire se termine et lui succède un flash lumineux qui marque le début de l’émission que tout le monde attend. Comme d’habitude, l’animateur arrive le premier sur le plateau, lance en l’air son micro, le rattrape d’un geste souple du poignet et sourit de toutes ses dents.

— Bienvenue à vous, chers amis holospectateurs, pour ce numéro de « C’est dans la boîte » ! J’ai le plaisir d’accueillir notre nouveau candidat : Amédée Phi !

Un murmure parcourt la salle de loisirs tandis qu’une figure austère et bien connue vient prendre place derrière un pupitre.

— C’est vraiment lui, souffle Alpha, incrédule. Le professeur Phi…

— Vous saviez qu’il s’appelait Amédée ?, interroge Bêta.

— Chut, ça commence !, lance quelqu’un.

L’animateur s’est effectivement tourné vers le professeur Phi et lui présente deux boîtes, l’une rouge, l’autre bleue.

— Mon cher Amédée, l’une de ces boîtes contient deux fois plus de brouzoufs que l’autre. Le contenu de celle que vous choisirez vous sera acquis. Laquelle prenez-vous ?

Tandis que Phi s'empare de la boîte bleue, la bouche de l'animateur se fend d'un sourire matois.

— Etes-vous bien sûr de votre choix ? Vous êtes professeur de mathématiques, je crois. Vous devez donc savoir que si la boîte bleue contient n brouzoufs, il y a une chance sur deux pour que la boîte rouge contienne $2n$ brouzoufs et une chance sur deux pour qu'elle en contienne $n/2$. En calculant l'espérance de gain en changeant l'enveloppe, nous obtenons : $1/2 * 2n + 1/2 * n/2 = 5n/4$, qui est indubitablement supérieur à n. Souhaitez-vous que nous procédions à l'échange ?

— Ça alors !, s'exclame Bêta, le même raisonnement s'appliquerait si Phi avait pris la boîte rouge… Quelle que soit la boîte choisie, le calcul d'espérance montre qu'il est préférable d'en changer. Comment est-ce possible ?

Et vous cher lecteur, changeriez-vous de boîte ?

Le professeur Phi prend sa décision et l'animateur passe à l'épreuve suivante. Il dispose trois nouvelles boîtes devant le candidat et lui demande :

— L'une de ces boîtes contient un chèque de mille brouzoufs, les deux autres sont vides. Mon cher Amédée, sur laquelle se porte votre choix ?

Le professeur Phi prend la boîte rouge. L'animateur s'empare alors de la boîte verte et l'ouvre : elle est vide. Il montre la dernière boîte :

— Vous avez la possibilité de changer d'avis et de choisir la boîte bleue. Que décidez-vous ?

Le professeur Phi réfléchit un instant et demande :

— Et vous, savez-vous où se trouvent les brouzoufs ?

— Oui, répond l'animateur avec un sourire.

Et cette fois-ci, cher lecteur, changeriez-vous d'avis ?

A la fin de l'émission, le professeur Phi ouvre les boîtes qu'il a remportées et… découvre qu'il a fait à chaque fois le mauvais choix. Moralité : être un spécialiste des probabilités n'empêche pas d'être malchanceux.

*Monnaie en cours sur PrépaTerra, le monde qui abrite l'Institut Intergalactique.

Solution

Il y a évidemment une entourloupe dans le raisonnement que propose l'animateur : en réalité, c'est l'application même du calcul d'espérance qui n'a pas de sens ! Si *m* est le nombre de brouzoufs dans la boîte qui en contient le moins, l'autre boîte en contient *2m*. Le nombre de brouzoufs dans la boîte choisie par Phi, *n*, est donc soit égal à *m*, soit à *2m*. Il s'agit dans tous les cas d'une constante et aucun raisonnement probabiliste ne s'applique. Le raisonnement erroné implique d'ailleurs un rapport de 4 entre les nombres de brouzoufs contenus dans les deux boîtes, ce qui est absurde puisque ce rapport est par construction de 2. Il n'y a donc aucun intérêt à changer de boîte, la probabilité que Phi ait fait le bon choix initialement est de ½.

La situation est différente dans la $2^{\text{ème}}$ épreuve. Initialement, Phi a une chance sur 3 de choisir la bonne boîte. Quand l'animateur ouvre, parmi celles restantes, une boîte qu'il sait être vide, on pourrait penser que la probabilité que les brouzoufs soient dans la première ou dans la dernière boîte devient ½. Or, la probabilité associée à la première boîte ne change pas et reste toujours 1/3 ! La probabilité que les brouzoufs soient dans la dernière boîte devient 2/3. Il vaut donc mieux changer de boîte ! Une façon de s'en convaincre consiste à imaginer la présence de 100 boîtes au lieu de 3, dont une seule contient des brouzoufs. Au départ, on a une chance sur 100 de gagner. Si l'animateur ouvre 98 boîtes qu'il sait être vides (ce dernier point est essentiel), il devient plus évident qu'échanger la première boîte choisie, qui a toujours une chance sur 100 d'être la bonne, contre la dernière restante, qui en a 99/100, est plus intéressant.

Ces résultats peu intuitifs ont laissé beaucoup d'experts dubitatifs !