Nouvelles d'une taupe modèle

Par Kylie Ravera

L'Institut Intergalactique est le temple de l'excellence où exerce le redouté professeur Phi. Kylie Ravera nous raconte leurs aventures.

Des trolls et des hobbits

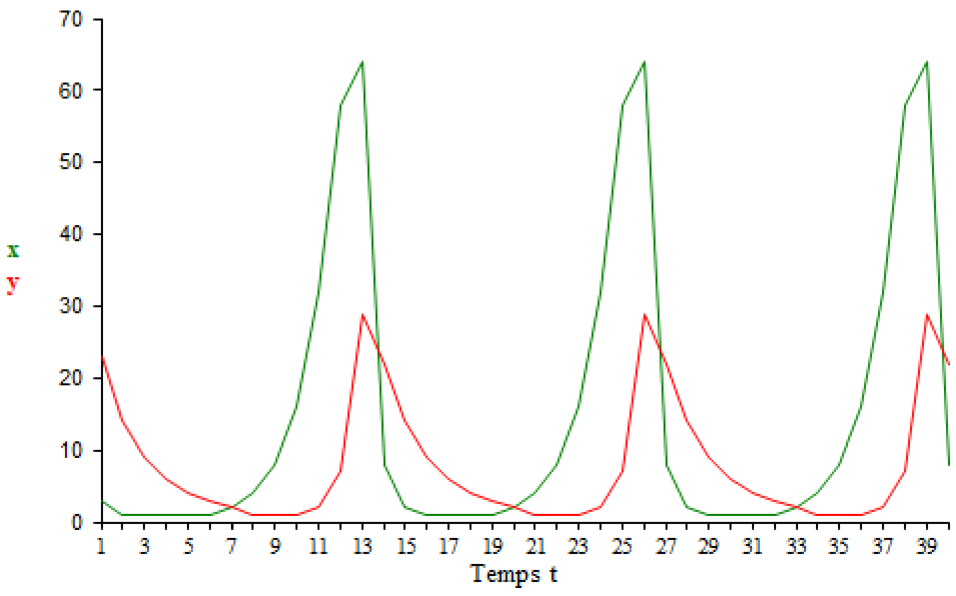
Installé dans la salle d'études, Bêta considère avec une terreur teintée de résignation l'énoncé du problème que le professeur Phi a demandé de résoudre pour le lendemain :

Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \qquad \frac{dy(t)}{dt} = cx(t)y(t) - dy(t)$$

Tracez les solutions de ce système pour différentes valeurs des coefficients a,b,c et d à l'aide d'un programmateur et étudiez la stabilité des points fixes.

Le seul point que Bêta fixe actuellement est très stable : il s'agit de la nuque d'Epsilon qui, assise devant lui, trace courbes sur courbes sur son programmateur.



Le soupir qu'il pousse est tellement profond qu'il oblige la jeune fille à se retourner. Elle observe son camarade avec un air sévère :

— Je suis désolée, Bêta, mais on en a déjà discuté : si je te donne à chaque fois les réponses aux problèmes de Phi, tu n'apprendras jamais rien et tu seras bien embêté au moment de passer les concours…

— Tu as raison, reconnaît Bêta, mais j'ai vraiment du mal à me représenter l'intérêt d'exercices théoriques comme celui-ci. A quoi cela nous avance-t-il, de résoudre ce genre d'équations ?

Epsilon réfléchit un instant avant de répondre par une autre question :

— C'est quoi le livre que tu lis en ce moment et qui semble tellement te passionner ?

— Un livre d'histoire antique. Ça s'appelle *Le seigneur des anneaux.*

— Hmm, pas sûre que les faits qui y sont relatés appartiennent vraiment à la réalité historique… Mais peu importe. On y trouve des trolls qui mangent des hobbits, si je me souviens bien.

Bêta opine, d'un air quelque peu ébahi.

— Parfait, poursuit Epsilon, alors reprenons nos équations et supposons que $x(t)$ représente l'évolution de la population des hobbits avec le temps et $y(t)$ celle des trolls. Serais-tu capable de trouver une signification aux coefficients a, b, c et d ?

Et vous, chers lecteurs, sauriez-vous en faire autant ?

— C'est tout de suite beaucoup plus intéressant, reconnaît Bêta avec une pointe d'excitation dans la voix.

Epsilon a un sourire satisfait.

— Ça devrait te motiver pour implémenter le programme qui permet de tracer les solutions de l'équation. Interpréter la signification des points fixes et de leur stabilité ne devrait ensuite pas poser de problème.

A vous non plus, n'est-ce pas, chers lecteurs ?

Solution

Lorsqu'il n'y a pas de troll, *y(t)=0* donc $\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$. *a* peut être vu comme le taux de reproduction des hobbits en l'absence de trolls, la variation de la population de hobbits suivant une loi exponentielle. Ensuite, les rencontres entre trolls et hobbits se soldent fatalement par une diminution du nombre de hobbits. *b* représente leur taux de disparition en raison des trolls. En parallèle, le nombre de trolls augmente avec la « consommation » de hobbits. *c* représente le taux de reproduction des trolls grâce aux hobbits dévorés. Mais la population de trolls ne croit pas à l'infini : *d* est leur taux de mortalité naturelle.

La résolution de ces équations différentielles (dites de Lotka-Volterra) se fait par des méthodes numériques qui s'implémentent facilement sur tableur ou en utilisant des langages de programmation adaptés aux mathématiques (ex. Matlab). En fonction de la valeur des coefficients et des effectifs initiaux, soit on obtient une disparition progressive des proies et des prédateurs, soit un cycle s'installe, comme sur le schéma illustratif.

Les points fixes correspondent à une stabilité des deux populations. On les trouve en annulant les dérivées, ce qui donne la solution évidente *{x(t)=0 ; y(t)=0}* et *{x(t)=d/c ; y(t)=a/b}*, qui représente le foyer autour duquel les populations oscillent.