

## Nouvelles d'une taupe modèle

Par Kylie Ravera

L'Institut Intergalactique est le temple de l'excellence où exerce le redouté professeur Phi. Kylie Ravera nous raconte leurs aventures.

### La punition

Le coup d'œil que lance Bêta en direction de la copie de son ami Alpha n'a rien de discret. Ce dernier, qui vient d'établir qu'il y a  $\frac{(2n)!}{k}$  permutations du groupe  $S_{2n}$  ayant un cycle de longueur égale à  $k$ , pousse un soupir avant de signaler à son camarade, du coin de la bouche :

— Tu sais, Bêta, le jour du concours, tu n'auras pas vraiment la possibilité de copier sur moi...

Bêta hausse les épaules avant de chuchoter à son tour :

— J'ai encore du temps pour travailler avant cette échéance. Là, je veux surtout éviter de me faire assassiner par Phi.

Les deux garçons jettent un regard en direction du professeur qui, selon son habitude pendant les contrôles, arpente les allées de la classe d'un pas consciencieux. Constatant qu'il leur tourne le dos, Alpha pousse légèrement sa copie en direction de Bêta.

— Tiens. Mais je ne suis pas sûr de te rendre service.

— De toute façon, bougonne Bêta, je ne vois pas à quoi peut servir ce genre de résultat complètement théorique...

— Vraiment ?

Bêta bondit sur sa chaise. Comme si les lois de la physique n'avaient pas de prise sur lui, le professeur Phi vient de se matérialiser à ses côtés.

— Posez vos stylos. Tous, assène-t-il d'une voix tranchante.

Bêta sent sa nuque picoter sous le regard chargé de rancune de ses camarades. Tous savent à quel point les colères du Professeur Phi peuvent être terribles.

Ce dernier s'est adossé à son bureau et toise la classe avec un demi-sourire qui n'augure rien de bon.

— Je vais vous raconter une petite histoire. Avez-vous déjà entendu parler du professeur Khi ?, demande-t-il.

Seul un silence intrigué lui répond. C'est qu'il n'entre pas tellement dans les habitudes de Phi de raconter des histoires...

— Il a enseigné les mathématiques à l'Institut il y a plusieurs années de cela, poursuit le professeur. Et une année, il a fait redoubler toute une promotion.

Le silence devient glacé tandis que Bêta commence à envisager sérieusement d'entrer dans la Légion.

— Voulez-vous savoir comment il a procédé ? ajoute Phi qui semble se délecter de la situation. Il a proposé un petit jeu à ses élèves. Il a disposé 30 boîtes numérotées de 1 à 30 dans une pièce, chacune contenant le nom de l'un des 30 étudiants, tous différents. Il leur a ensuite indiqué qu'ils allaient entrer un par un dans la pièce, dans un ordre aléatoire, pour ouvrir chacun jusqu'à 15 boîtes. Un étudiant parvenant à trouver son nom dans l'une des 15 boîtes devait quitter la pièce après avoir refermé celles qu'il avait ouvertes. Or, pour que la promotion soit sauvée, il fallait que *chaque* étudiant trouve la boîte avec son nom. Si un seul échouait... redoublement généralisé. Et c'est ce qui s'est produit.

Un doigt timide se lève dans la classe. Il appartient à Epsilon.

— Ce n'est pas très étonnant si on songe qu'il n'y avait qu'une chance sur  $2^{30}$  pour qu'ils réussissent...

— Tut tut. Ceci n'est vrai qu'en cas de choix aléatoire des boîtes à ouvrir. Là, les étudiants ont eu le droit de se concerter une fois avant que le premier d'entre eux ne pénètre dans la

pièce. Ils ont eu l'occasion de mettre au point une stratégie susceptible d'augmenter considérablement leurs chances.

Le regard du professeur se perd un instant dans le vide.

— Ils n'ont pas su la saisir.

Il se reprend rapidement et frotte ses mains en considérant la classe frémissante.

— Voyons voir si vous saurez faire mieux qu'eux. Nous n'allons pas jouer au petit jeu de Khi, mais je vais vous demander tous ensemble d'élaborer une stratégie qui aurait sauvé l'année des étudiants avec une probabilité d'environ 30%.

Il se penche vers Bêta pour ajouter :

— Et vous utiliserez justement la proposition que vous jugiez si inutile pour établir le résultat.

— Que se passera-t-il si on n'y arrive pas ? ose demander Alpha.

— Il vous reste quinze minutes, répond simplement Phi en tapotant sa montre.

Alors que la classe se met précipitamment en branle, Phi retourne s'asseoir à son bureau.

— Qu'est-ce que j'ai pu détester avoir cours avec le professeur Khi..., murmure-t-il.

*Et vous, cher lecteur, saurez-vous aider les élèves du professeur Phi à mettre en place une stratégie gagnante dans 30% des cas ? Sauriez-vous également démontrer que cette probabilité de gain reste supérieure à 30% quel que soit le nombre d'étudiants ?*

## Solution

Toute la stratégie repose sur la notion de cycle. Les étudiants doivent se numéroter de 1 à 30 (chacun mémorisant le numéro de ses camarades). En entrant dans la pièce, un étudiant commence par ouvrir la boîte portant son numéro. Si elle ne contient pas son nom, il ouvre ensuite celle qui porte le numéro de l'étudiant dont il a trouvé le nom. Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il tombe sur la bonne boîte... ou que le jeu se termine sur un échec ! Chaque étudiant décrit un cycle de longueur  $k$ , avec  $k \leq 30$ . Les élèves gagnent si chaque  $k \leq 15$ .

Calculons la probabilité de ce cas favorable. Nous savons qu'il y a  $\frac{(2n)!}{k}$  permutations du groupe  $S_{2n}$  ayant un cycle de longueur égale à  $k$ . Dans notre cas,  $2n=30$ . Le nombre de permutations ayant un cycle de longueur strictement supérieure à  $n$  est donc :  $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n)!}{k}$ . Cela

représente les cas d'échec. La probabilité pour les étudiants de perdre au jeu est par

conséquent : 
$$\frac{1}{(2n)!} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n)!}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Cela se calcule aisément pour  $2n=30$ . On arrive à 0,68, soit environ 32% de chance pour les

étudiants de gagner. Pour étendre le résultat, étudions la suite  $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ . Il s'agit d'une

suite croissante, comme le montre le calcul de  $u_{n+1} - u_n$ . Or, en introduisant l'égalité :

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} = \ln(m) + \gamma + o(1) \text{ où } \gamma \text{ est la constante d'Euler, on trouve } u_n = \ln(2) + o(1). u_n \text{ tend vers}$$

$\ln(2) = 0,69\dots$  et comme la suite est croissante, ses valeurs restent en dessous de cette limite.

Avec la stratégie proposée, les chances de gagner pour les étudiants restent donc supérieures à 30%, quel que soit leur nombre.