Nouvelles d’une taupe modèle

Par Kylie Ravera

L’Institut Intergalactique est le temple de l’excellence où exerce le redouté professeur Phi. Kylie Ravera nous raconte leurs aventures.

Absurdes démonstrations

La vie d’un étudiant de l’Institut Intergalactique est faite d’une succession de moments plus ou moins agréables qui s’articulent autour de l’enseignement de disciplines exigeantes. L’un des moments les moins agréables et les plus exigeants est sans nul doute le passage d’une interrogation orale de mathématiques. Et quand la colle en question est conduite par un professeur aussi redoutable pour l’estime de soi que le professeur Phi, elle peut facilement virer au cauchemar.

En passant devant la salle où officie le terrible professeur, Epsilon avise son camarade Bêta, assis par terre dans le couloir, le dos collé au mur. Il tient entre ses mains une feuille de papier qu’il contemple avec un air malheureux. Il lève la tête quand la jeune fille s’approche de lui.

— Je me suis encore une fois fait sortir par Phi, explique-t-il dans un soupir.

Cela n’a rien d’exceptionnel, le professeur n’étant pas réputé pour sa patience ni Bêta pour le sérieux de ses révisions.

— J’ai réussi à prouver que 2+2 = 5, poursuit Bêta. Et d’après Phi, cela revient à prouver que je suis le pape.[1]

— Dur, commente Epsilon.

[1] Le professeur Phi connait apparemment le philosophe Bertrand Russell…

— Le pire, c’est qu’il m’a donné cette feuille avec trois démonstrations qui conduisent à des conclusions tout aussi absurdes. Je dois montrer pourquoi elles sont fausses. Mais j’ai du mal à voir ce qui cloche.

La curiosité d’Epsilon est aussitôt éveillée.

— Je peux ?

Bêta ne se fait pas prier.

La première démonstration concerne une équation en apparence toute simple :

« Soit l’équation $\frac{6}{x-2} - 2 = \frac{10-2x}{x-1}$. En ramenant le terme de gauche sur un seul dénominateur, on obtient : $\frac{10-2x}{x-2} = \frac{10-2x}{x-1}$. Or, si deux fractions égales ont leurs numérateurs égaux, les dénominateurs le sont aussi. On a donc : x-2=x-1 soit 2=1. »

Epsilon ne met pas longtemps à trouver la faille dans le raisonnement. *Et vous, cher lecteur, saurez-vous en faire autant ?*

Bêta se gratte la tête d’un air confus.

— Effectivement, marmonne-t-il, j’aurais dû y penser. Et… que dis-tu de la deuxième démonstration ?

Cette dernière traite d’une série infinie :

« Ecrivons la relation indubitablement exacte : 0 = 1 – 1. En l’écrivant deux fois et en additionnant de part en part, nous obtenons : 0 + 0 = 1 - 1 + 1 – 1. En l’écrivant une infinité de fois et en additionnant, nous avons 0 + 0 + 0 +… = 1 – 1 + 1 – 1 + … En utilisant l’associativité de l’addition, et en simplifiant le terme de gauche, on trouve : 0 = 1 - (1 – 1) – (1 – 1) – (1 – 1)… soit, en remplaçant le contenu des parenthèses par leur valeur qui est nulle, 0 = 1 ».

— Ça ne vaut pas mieux que 2 + 2 = 5, grogne Bêta.

Epsilon ne peut s’empêcher de sourire.

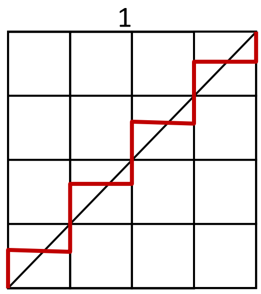
— En fait, cela revient strictement au même. Mais tout cela reste faux, bien entendu.

Et vous, cher lecteur, qu'en pensez-vous ?

— Effectivement, admet Bêta une fois qu'Epsilon lui a fournit quelques explications, je me rappelle maintenant qu'on n'a pas le droit de faire n'importe quoi avec de séries infinies. Mais je parie que la troisième démonstration va te donner plus de fil à retordre.

Cette dernière est illustrée par un schéma :

«



Soit un carré de côté 1. Sa diagonale vaut $\sqrt{2}$. Divisons le carré en n x n carrés. Traçons la courbe (en rouge) qui serpente autour de la diagonale en reliant le milieu des côtés opposés des petits carrés. Quel que soit n, la longueur de la courbe rouge vaut 2 (1 pour les segments horizontaux plus 1 pour les segments verticaux). Calculons à présent l'aire des petits triangles entre la courbe rouge et la diagonale. Pour chaque triangle, elle vaut : $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2n}\times\frac{\sqrt{2}}{4n}=\frac{1}{8n^2}$.

La somme des aires de tous les triangles qui sont au nombre de 2n vaut donc $\frac{1}{4n}$. Quand n tend vers l'infini, la surface qui symbolise la différence entre la courbe rouge et la diagonale tend donc vers une surface d'aire nulle. On a par conséquent une courbe de longueur 2 qui tend vers une courbe de longueur $\sqrt{2}$. Donc 2 = $\sqrt{2}$. »

Cette fois, Epsilon fronce les sourcils pendant une bonne minute… avant de proposer une explication.

— Sais-tu, lance-t-elle à un Bêta ébaubi, que la longueur des côtes de la Bretagne est infinie ?

— Quel est le rapport entre ma démonstration et un coin perdu de la Vieille Terre?, balbutie le garçon.

— Les fractales, répond mystérieusement la jeune fille.

Cet indice vous permettra-t-il, cher lecteur, de résoudre le paradoxe de cette dernière démonstration ?

Solution

On retrouve dans la première démonstration le spectre redouté de la division par 0 : l'équation admet en effet 5 comme unique solution ; on ne peut donc simplifier par 10 – 2x, ce qui reviendrait à diviser par 0 ! La deuxième démonstration repose sur des passages à l'infini pour le moins hasardeux : 0 + 0 + 0 +… n'est en rien déterminé ! Et réarranger les termes d'une série infinie en arguant de l'associativité de l'addition ferait grincer des dents n'importe quel professeur de mathématiques…

La dernière démonstration est plus subtile : le fait que la surface qui sépare la courbe rouge de la diagonale tende vers 0 ne permet pas de conclure que la longueur de la courbe rouge tend elle-même vers la longueur de la diagonale. Faire tendre n vers l'infini revient à transformer la courbe rouge en la réunion d'une infinité de segments de longueur nulle : il s'agit d'une structure fractale, tout comme les côtes de la Bretagne, qui, contrairement au segment, n'est pas de dimension 1. Envisager un passage à la limite dans de telles conditions est pour le moins abusif ! Une explication plus détaillée de ce paradoxe est disponible sur le blog d'Alexandre Moatti : http://www.maths-et-physique.net/.