Nouvelles d’une taupe modèle

Par Kylie Ravera

L’Institut Intergalactique est le temple de l’excellence où exerce le redouté professeur Phi. Kylie Ravera nous raconte leurs aventures.

La matrice désespérante

Sitôt le cours de mathématiques du professeur Phi terminé, les élèves quittent la salle de classe dans un brouhaha qui se translate nonchalamment en direction de la cantine.

La palette de porc à la diable accompagnée de son lit de choux de Bruxelles suscite chez Bêta à peu près le même enthousiasme que la leçon à laquelle il vient d’assister.

— Ce n’est décidément pas mon jour, soupire-t-il en considérant d’un regard morne le bourgeon verdâtre qui, bien que planté sur sa fourchette, semble le narguer avec insolence. Encore un cours de Phi auquel je n’ai rien compris, et maintenant… ça.

Assise en face de lui, Epsilon a adopté une attitude plus positive.

— Je l’ai trouvé plutôt intéressant, ce cours sur l’espérance mathématique.

— Je ne vois pas ce que l’espérance et les mathématiques peuvent avoir en commun, grogne Bêta.

Epsilon, qui a envie de faire partager à son camarade les beautés de sa matière préférée, décide alors de miser sur son côté joueur. Elle sort une pièce d’un brouzouf de sa poche.

— Supposons que je sois un casino, dit-elle. Voilà le jeu que je te propose : tu vas miser une certaine somme et je vais lancer la pièce. Si elle tombe sur pile, tu gagnes 2 brouzoufs et le jeu s’arrête. Si elle tombe sur face, je la relance. Pile : tu gagnes 4 brouzoufs. Face : je relance. Pile : tu gagnes 8 brouzoufs. Face je relance. Tu as compris : si le premier pile tombe au n-ième coup, tu gagnes 2^n brouzoufs et le jeu se termine. Alors ? Tu accepterais de jouer avec moi ?

Bêta a froncé les sourcils.

— Ça dépend de la mise initiale, répond-il prudemment. Si je comprends bien, mon gain sera de 2^n moins ma mise. Si ce chiffre est négatif, ce sera une perte.

— Combien es-tu prêt à miser par tirage ?

Bêta hausse les épaules.

— Je dirais, à vue de nez, pas plus de 10 brouzoufs. Sinon, je ne gagnerai jamais.

Epsilon sourit.

— Eh bien un petit calcul d'espérance montre justement que tu aurais intérêt à jouer à ce jeu quelle que soit la mise demandée ! A supposer, bien sûr, que mon casino ait des ressources infinies…

Et vous, cher lecteur, sauriez-vous démontrer cet étrange résultat[1] *?*

— D'accord, reconnaît Bêta après les explications d'Epsilon, j'admets que c'est assez… étonnant.

— Et j'ai encore mieux !, continue Epsilon sur sa lancée. Imaginons à présent un jeu basé sur une succession de paris dont les règles seraient les suivantes : pour mon premier pari, je lance une pièce ; si j'obtiens un pile, je perds un brouzouf. Si j'obtiens un face, je relance la pièce. Un face au coup suivant me fait gagner 3 brouzoufs. Un pile : personne ne perd, personne ne gagne. Dans les deux cas, c'est la fin du 1er pari. De la même façon, j'imagine le 2ème pari : si j'obtiens face puis pile, je perds 4 brouzoufs. Si j'obtiens face, face et pile, je gagne 9 brouzoufs. Dans tous les autres cas, je ne perds ni ne gagne rien. Mon nième pari pour n>=2 sera le suivant : si j'obtiens (n-1) faces puis un pile, je perds $3^{n-1} + 1$ brouzoufs. Si j'obtiens n

[1] *On rappelle que l'espérance d'une variable aléatoire discrète X prenant la valeur x_i avec la probabilité p_i est donnée par* $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ *. Un jeu avec une espérance strictement positive est gagnant pour le joueur.*

faces puis un pile, je gagne 3^n brouzoufs. Cela revient en fait à parier sur le nombre de face que j'obtiens avant d'avoir un pile. La question est…

— Attends, gémit Bêta, je ne suis plus rien !

Epsilon sort alors un papier et un crayon de son sac et commence à griffonner :

— Le plus simple, c'est de visualiser ces paris sous la forme d'une matrice infinie, explique-t-elle.

Gain	Tirage : P	Tirage : FP	Tirage : FFP	…	Tirage : (n-1)FP	Tirage : nFP	Tirage : (n+1)FP	…
Pari 1	-1	3	0	…	0	0	0	…
Pari 2	0	-4	9	…	0	0	0	…
…	0	0	0	…	0	0	0	…
Pari (n)	0	0	0	…	$-(3^{(n-1)}+1)$	3^n	0	…
Pari (n+1)	0	0	0	…	0	$-(3^n+1)$	3^{n+1}	…
…	0	0	0	…	0	0	0	…

— C'est vrai que c'est beaucoup plus clair, fait Bêta sur un ton sarcastique. Et alors ?

— Alors, poursuit Epsilon, on arrive à une bizarrerie assez surprenante si on calcule d'une part les espérances de chacun des paris de façon indépendante et qu'on regarde ensuite l'espérance globale de l'ensemble des paris.

A votre avis, cher lecteur, quelle est cette bizarrerie dont parle Epsilon ?Indice : on calcule aisément que la probabilité de sortir (n-1)FP est de $1/2^n$

— Qu'est-ce que tu dis de ça ?, demande Epsilon à Bêta avec un sourire rayonnant.

— J'en dis… que tu es vraiment désespérante, se contente de soupirer ce dernier.

Solution

Le premier problème illustre le paradoxe dit de St-Petersburg. L'espérance de gain est en effet $E = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \times \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$. Ce résultat signifie que quelle que soit la mise, le joueur a intérêt à jouer : il finira par être gagnant. L'histoire ne dit cependant pas quand… Ni si le joueur aura à ce moment-là encore de quoi miser, ou le casino les moyens de le payer ! Ce résultat peut paraître paradoxal car il exprime l'aversion au risque du joueur : personne n'accepte de miser trop gros même pour gagner beaucoup.

Le 2ème problème illustre le fait suivant : accepter un ensemble de paris gagnants ne conduit pas nécessairement à un pari gagnant ! En effet, à partir de la matrice des gains, calculons la matrice des espérances (matrice infinie de Monnier) :

Espérance de Gain	Tirage : P	Tirage : FP	Tirage : FFP	…	Tirage : (n-1)FP	Tirage : nFP	Tirage : (n+1)FP	…	Espérance du pari élémentaire
Pari 1	-1/2	3/4	0	…	0	0	0	…	1/4
Pari 2	0	-4/4	9/8	…	0	0	0	…	1/8
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
Pari (n)	0	0	0	…	$-(3^{(n-1)}+1) / 2^n$	$3^n / 2^{n+1}$	0	…	$(3^{n-1}-2)/2^{n+1}$
Pari (n+1)	0	0	0	…	0	$-(3^n+1) / 2^{n+1}$	$3^{n+1} / 2^{n+2}$	…	$(3^n-2)/2^{n+2}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
Calcul de l'espérance du pari global	-1/2	-1/4	-1/8	…	$-1/2^n$	$-1/2^{n+1}$	$-1/2^{n+2}$	…	

On se rend compte que l'espérance de chaque pari individuel (somme des éléments d'une ligne) est positive : il est donc gagnant. En revanche, l'espérance globale prenant en compte tous les paris (somme de la somme des éléments de chaque colonne) est négative : le pari groupé est perdant !

La matrice de Monnier a ceci de particulier que la somme des éléments de ses lignes est positive alors que la somme des éléments de ses colonnes est négative. Cela n'est possible que parce que l'on traite de matrices infinies ! D'autres matrices conduisant à d'autres règles de paris qui mènent au même genre de résultat peuvent être construites sur la base de cette constatation.

Ce paradoxe est détaillé dans « Les inattendus mathématiques » de Jean-Paul Delahaye, éditions Belin.